

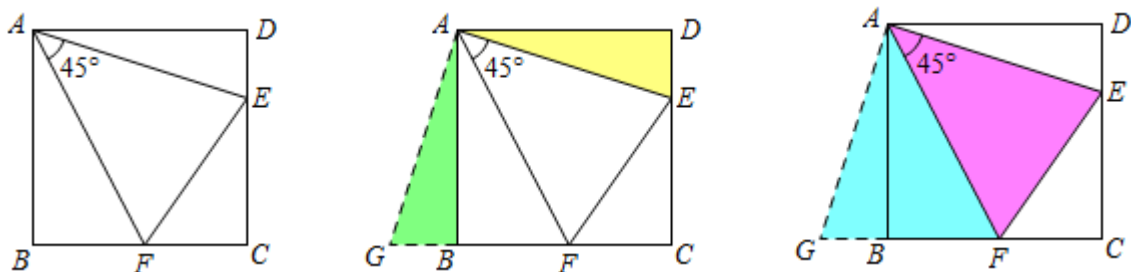
第3讲半角模型和悬挂模型

一、角含半角模型

1. 半角在倍角内

 锦囊妙计

如图，正方形 $ABCD$ ，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 BC 上， $\angle EOF = 45^\circ$ 。



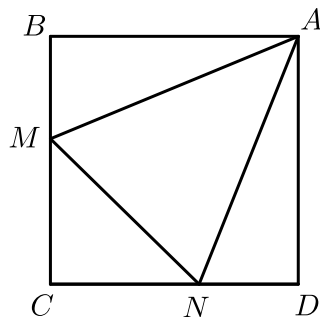
【辅助线】延长 BC 至点 G ，使_____，连接 AG 。

【结论】

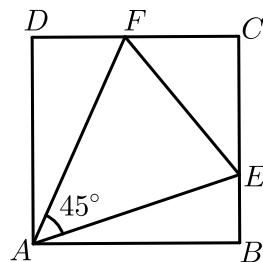
- ① 旋转全等： $\triangle ABG \cong \triangle ADE$ ，理由_____。
- ② 对称全等： $\triangle FAG \cong \triangle FAE$ ，理由_____。
- ③ $EF = BF + DE$ ，进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形周长的_____。
- ④ AF 平分_____， AE 平分_____。
- ⑤ 过点 A 作 $AH \perp EF$ ，垂足为 H ，则_____。

 栗子1

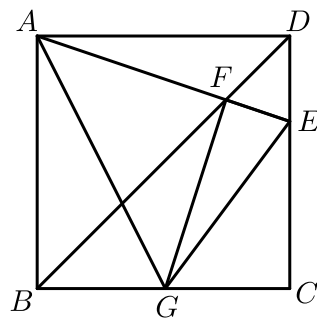
1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC = CD = DA$ ， $\angle BAD = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ，点 M 、 N 分别在边 BC 、 CD 上，且 $\angle MAN = 45^\circ$ ，若 $BM = 3$ ， $ND = 2$ ， MN 的长度为_____。



2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $\triangle ECF$ 的周长为4，则正方形 $ABCD$ 的边长为（ ）。

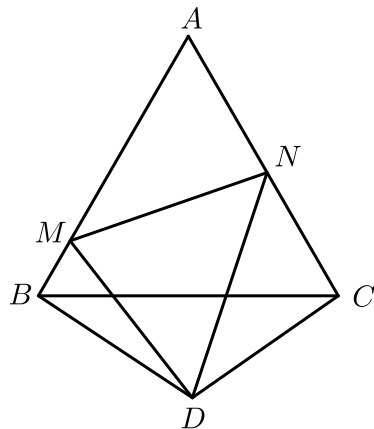


- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 CD 上一动点，连接 AE 交对角线 BD 于点 F ，过点 F 作 $FG \perp AE$ 交 BC 于点 G ，连接 EG ，已知正方形 $ABCD$ 边长为4cm，求 $\triangle ECG$ 的周长。

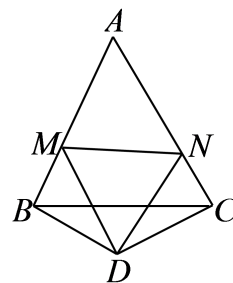


栗子2

4. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $\triangle BDC$ 是顶角 $\angle BDC = 120^\circ$ 的等腰三角形，以 D 为顶点作一个 60° 角，角的两边分别交 AB 、 AC 于 M 、 N ，连接 MN ，若 $S_{\triangle BMD} + S_{\triangle CND} = 10$ ，则 $S_{\triangle DMN} =$ _____。

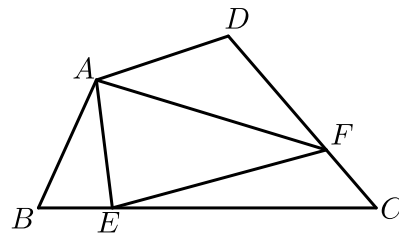


5. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形， $\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ ，以 D 为顶点作一个 60° 角，使其两边分别交 AB 于点 M ，交 AC 于点 N ，连接 MN ，则 $\triangle AMN$ 的周长是多少？



栗子3

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， $AB = AD$ 。 E ， F 分别是线段 BC ， CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ 。若 $EF = 11$ ， $BE = 3$ ，则 $DF = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



7. 回答下列问题：

- (1) 如图1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$. 请直接写出线段 EF , BE , FD 之间的数量关系 _____.

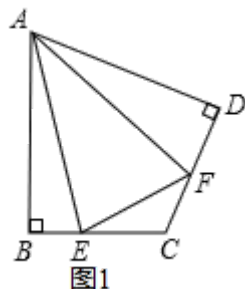


图1

- (2) 如图2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$, (1)中的结论是否仍然成立? 请写出证明过程.

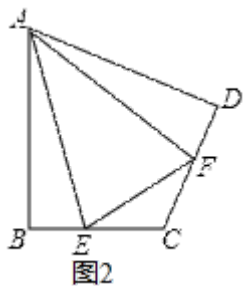


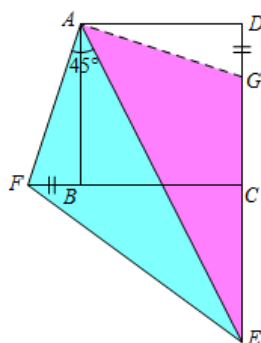
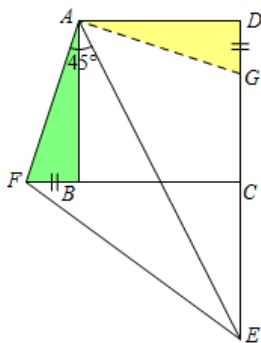
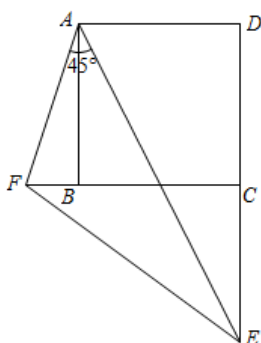
图2

- (3) 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 所在直线上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$. 请直接写出线段 EF , BE , FD 之间的数量关系 _____.

2. 半角在倍角外

锦囊妙计

正方形 $ABCD$, $\angle EAF = 45^\circ$, 旋转 $\angle EAF$ 与 DC 的延长线交于点 E , 与 CB 的延长线交于点 F .



【辅助线】在 CD 截取_____, 连接 AG .

【结论】① 旋转全等: $\triangle ABF \cong \triangle ADG$, 理由_____.

② 对称全等: $\triangle EAG \cong \triangle EAF$, 理由SAS_____

③ $EF =$ _____.

④ AE 平分_____.

8. 通过类比联想，引申拓展研究典型题目，可达到解一类题的目的，下面是一个案例，请补充完整．

原题：如图1，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系．

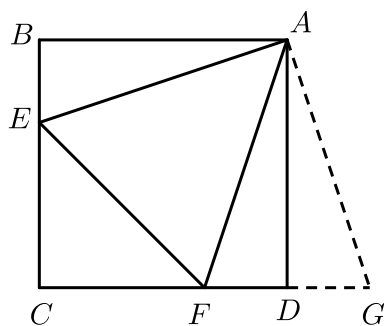


图 1

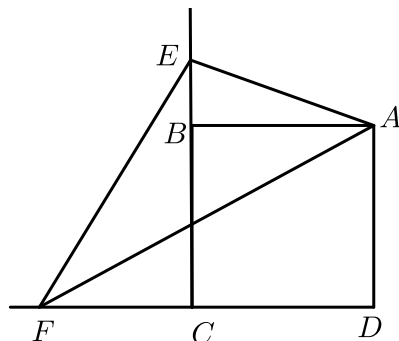


图 2

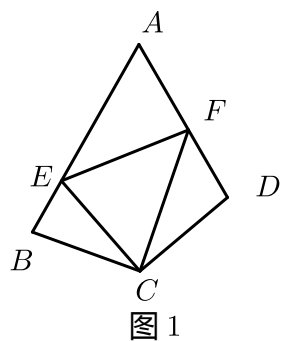
(1) 思路梳理

把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，可使 AB 与 AD 重合，由 $\angle ADG = \angle B = 90^\circ$ ，得 $\angle FDG = 180^\circ$ ，即点 F 、 D 、 G 共线，易证 $\triangle AFG$ _____，故 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为 _____．

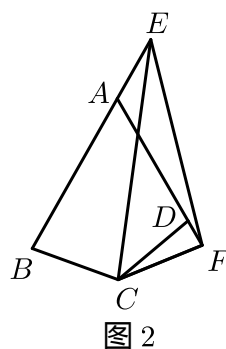
(2) 类比引申

如图2，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CB 、 DC 的延长线上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为 _____，并给出证明．

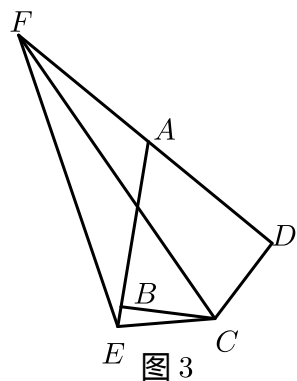
9. 如图1, 四边形 $ABCD$ 中, $BC = CD$, $\angle BCD = 120^\circ$, E 、 F 分别为 AB 、 AD 上的点, $\angle ECF = \angle A = 60^\circ$.



- (1) 求证: $EF = BE + DF$.
- (2) 如图2, 将图1中点 E 移至 BA 延长线上, 点 F 移至 AD 延长线上, 其余条件不变, 写出 EF 和 BE , DF 之间的数量关系并证明.



- (3) 如图3, 将图1中点 E 移至 AB 延长线上, 点 F 移至 DA 延长线上, 其余条件不变, 直接写出 EF 和 BE , DF 之间的数量关系为 _____.



10. 问题：

- (1) 如图1，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = \angle D$ ， $AB = BC = CD$ ，点 M ， N 分别在 AD ， CD 上，若 $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$ ，试探究线段 MN ， AM ， CN 有怎样的数量关系？
请直接写出你的猜想，不用证明．

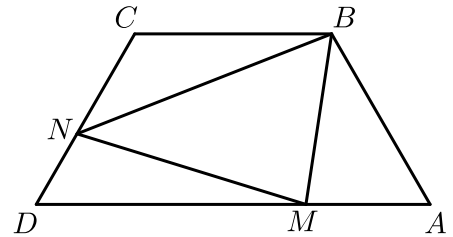


图1

- (2) 如图2，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，点 M ， N 分别在 DA ， CD 的延长线上，若 $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$ 仍然成立，请你进一步探究线段 MN ， AM ， CN 又有怎样的数量关系？写出你的猜想，并给予证明．

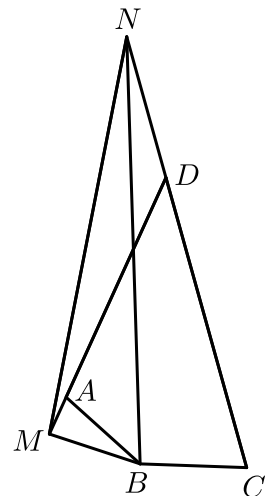
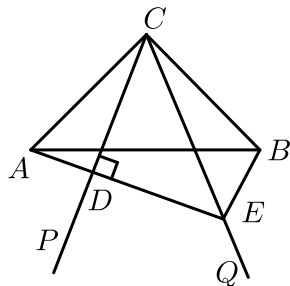


图2

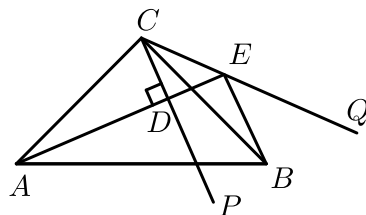
11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $\angle PCQ = 45^\circ$ ，把 $\angle PCQ$ 绕点 C 旋转，在整个旋转过程中，过点 A 作 $AD \perp CP$ ，垂足为 D ，直线 AD 交 CQ 于 E 。

(1) 如图①，当 $\angle PCQ$ 在 $\angle ACB$ 内部时，求证： $AD + BE = DE$ 。



图①

(2) 如图②，当 CQ 在 $\angle ACB$ 外部时，则线段 AD 、 BE 与 DE 的关系为_____。



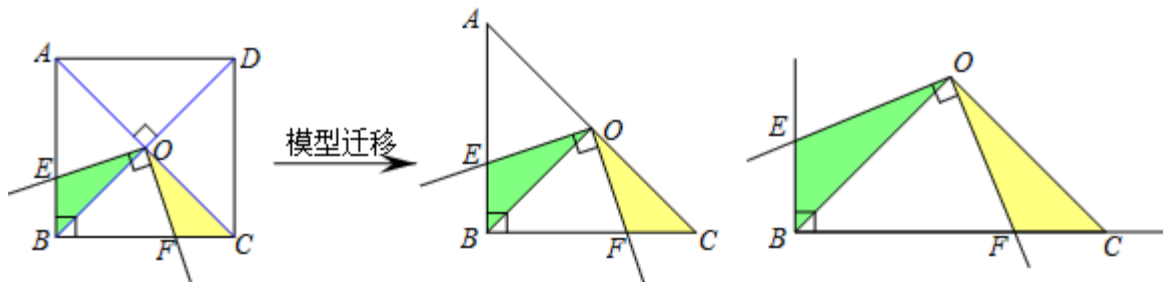
图②

(3) 在(1)的条件下，若 $CD = 6$ ， $S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACD}$ ，求 AE 的长。

二、悬挂模型

锦囊妙计

正方形 $ABCD$ ，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， $\angle EOF = 90^\circ$ ，与正方形的两边分别交于点 E 、 F 。

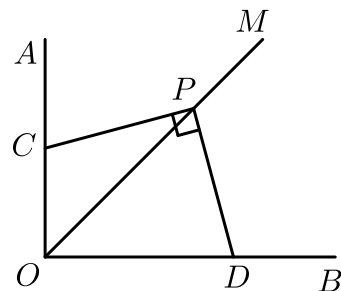


【结论】① $\triangle BOE \cong \triangle COF$ ， $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ 。

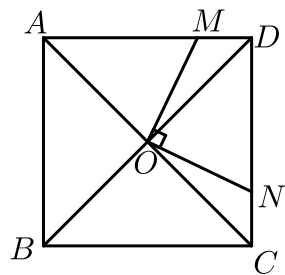
② $OE = OF$ ，

③ $S_{\text{四边形}OEBF} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}$ 。

12. 如图, $\angle AOB = 90^\circ$, OM 平分 $\angle AOB$, 将直角三角板的顶点 P 在射线 OM 上移动, 两直角边分别与 OA , OB 相交于点 C , D , $PC = 3$, 则 $PD =$ _____ .

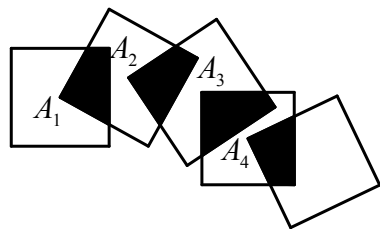


13. 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 O , M 是边 AD 上一点, 连接 OM , 过点 O 作 $ON \perp OM$, 交 CD 于点 N . 若四边形 $MOND$ 的面积是 1, 则 AB 的长为 ().



- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

14. 将 5 个边长为 2cm 的正方形按如图所示摆放, 点 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 是正方形的中心, 则这个正方形重叠部分的面积和为 ().

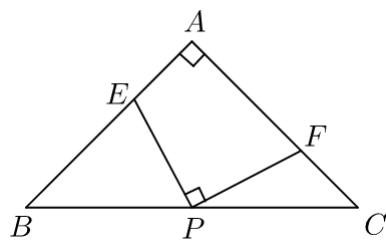


- A. 2cm^2 B. 1cm^2 C. 4cm^2 D. 6cm^2

15. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点，两边 PE ， PF 分别交 AB ， AC 于点 E 、 F ．给出以下四个结论：

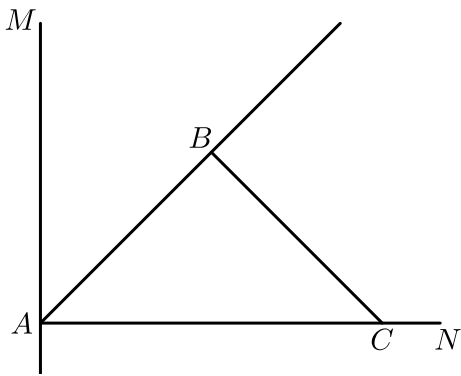
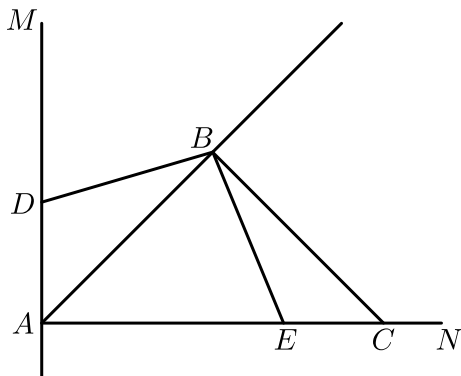
- ① $AE = CF$ ；
- ② $EF = AP$ ；
- ③ $\triangle EPF$ 是等腰直角三角形；
- ④ $S_{\text{四边形}AEPF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ ．

上述结论始终正确的有（ ）．



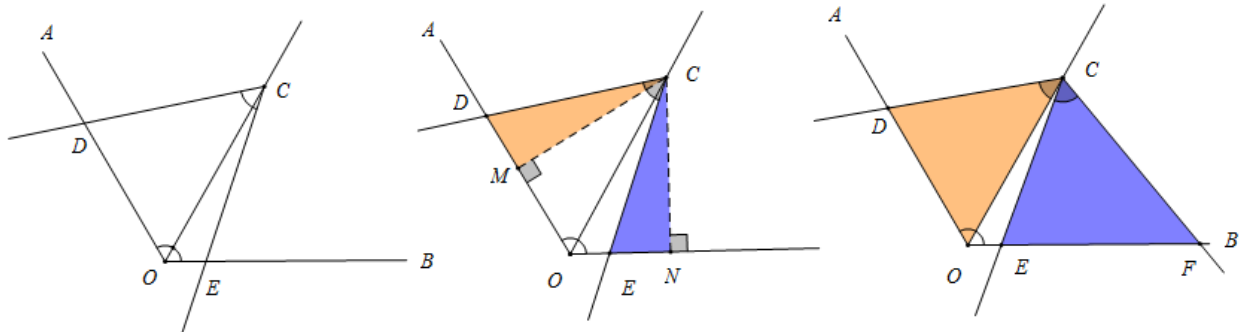
- A. ①②③ B. ①③ C. ①③④ D. ①②③④

16. 如图，直线 $AM \perp AN$ ， AB 平分 $\angle MAN$ ，过点 B 作 $BC \perp BA$ 交 AN 于点 C ；动点 E 、 D 同时从 A 点出发，其中动点 E 以 2cm/s 的速度沿射线 AN 方向运动，动点 D 以 1cm/s 的速度运动；已知 $AC = 6\text{cm}$ ，设动点 D ， E 的运动时间为 t ．



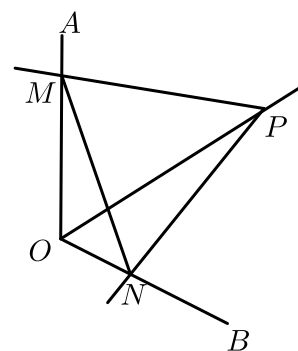
- (1) 试求 $\angle ACB$ 的度数．
- (2) 当点 D 在射线 AM 上运动时满足 $S_{\triangle ADB} : S_{\triangle BEC} = 2 : 3$ ，试求点 D 、 E 的运动时间 t 的值．
- (3) 当动点 D 在直线 AM 上运动， E 在射线 AN 运动过程中，是否存在某个时间 t ，使得 $\triangle ADB$ 与 $\triangle BEC$ 全等？若存在，请求出时间 t 的值；若不存在，请说明理由．

【变式模型】

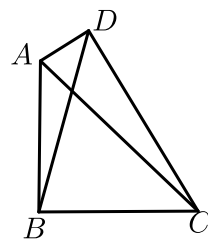


栗子7

17. 如图，点 P 为定角 $\angle AOB$ 的平分线上的一个定点，且 $\angle MPN$ 与 $\angle AOB$ 互补，若 $\angle MPN$ 在绕点 P 旋转的过程中，其两边分别与 OA 、 OB 相交于 M 、 N 两点，则以下结论：（1） $PM = PN$ 恒成立．（2） $OM + ON$ 的值不变．（3）四边形 $PMON$ 的面积不变．（4） MN 的长不变，其中正确的个数为（ ）．



- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
18. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AB = CB$ ， $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ ，连接 BD 、 AC ， $BD = 7\text{cm}$ ，则 $S_{\text{四边形}ABCD}$ 的面积为 _____ ．



19. 已知 $\angle MAN = 120^\circ$, AC 平分 $\angle MAN$.

(1) 在图1中, 若 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 求证: $AB = AD$.

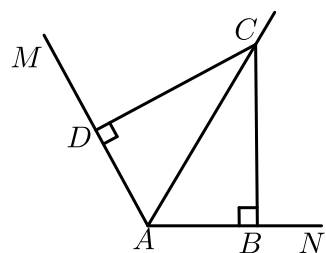


图1

(2) 在图2中, 若 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, 求证: $AB + AD = AC$.

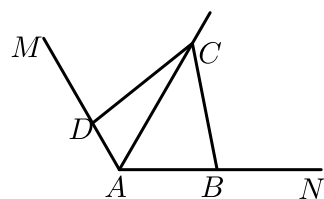


图2

20. 回答下列各题.

(1) 如图1, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, AC 平分 $\angle BAD$, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E . 求证: $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$.

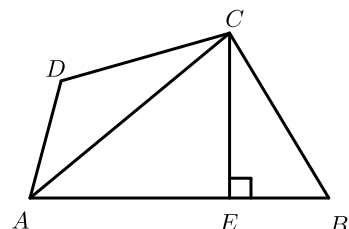


图1

(2) 如图2, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle BAD$, $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E . 求证:

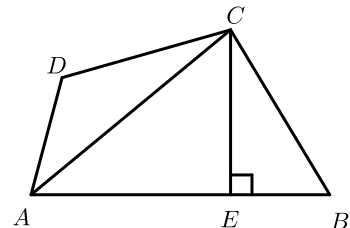


图2

① $CD = CB$.

② $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$.